

## Pratique Supplémentaire 10

Cette série fait suite aux chapitres 6.1 6.2 6.3 du livre *Algèbre Linéaire et applications* de D. Lay, aussi bien que certains concepts vus au cours.

**Remarques :** il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre ces exercices. Des fois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.

### Exercice 1

Soit  $V$  une espace euclidien. On note  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  et la norme associée est  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$ . Par exemple, considérez que  $V = \mathbb{R}^n$  et on utilise le produit scalaire habituel  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^\top \vec{v}$ .

Montrer :

- Si  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  est une famille orthonormale, alors  $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{2}$ .
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ .
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$  pour tous  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ .

### Exercice 2

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ .

- Montrer que  $\text{Ker} A = \text{Ker}(A^T A)$ .
- Montrer que  $A^T A$  est inversible si et seulement si les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

### Exercice 3

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
|  | V                        | F                        |
| a) Une base d'un sous-espace vectoriel $W$ de $\mathbb{R}^n$ qui est un ensemble de vecteurs orthogonaux est appelée une base orthonormale.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b) Un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ orthogonal de vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendant et de ce fait est une base du sous-espace qu'il engendre. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c) Une base orthonormale est une base orthogonale mais la réciproque est fautive en général.   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| d) Si $\vec{x}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel $W$ , alors $\vec{x} - \vec{p}_W(\vec{x})$ n'est pas nul (ici $\vec{p}_W(\vec{x})$ désigne la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $W$ ).   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

---

Copyright © Prof(s). de la section de mathématiques EPFL (Assyr Abdulle, ...). Les exercices de type vrai ou faux proviennent du livre: D.C. Lay. *Algèbre linéaire : théorie, exercices et applications*. De Boeck, Bruxelles, 2005.